# Les nombres impossibles, ou la trangression de l'interdit en mathématiques

Jacques Lafontaine `jaclaf@sfr.fr`

20 Octobre 2018


Figure: François Viete (1540-1603)

*Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.*

Wolfgang Goethe (1749-1832), Maximen und Reflexionen, Nachlaß, Über Natur und Naturwissenschaft

Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur langage, et cela devient quelque chose de complètement différent.

*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*

Leopold Kronecker (1823-1891)

Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'oeuvre de l'Homme.

# Le partage des dix-sept chameaux

L'histoire suivante, attribuée à Ali, gendre de Mohammed, était encore racontée par des bédouins au siècle dernier.
Un riche marchand avait 17 chameaux. Il lèga par testament la moitié au fils aîné, le tiers au second, et le neuvième au cadet.
Bien embarrassés, ils allèrent voir le juge.

# Ce que dit le juge

J'ai un chameau, je vous le prête. Toi l'aîné, prend la moité des chameaux, soit neuf, toi le second le tiers, soit six, toi le cadet le neuvième soit deux. Il reste un chameau, le mien, je le reprends.

# D'où vient ce tour de passe-passe ?

Contrairement aux trois frères, le juge connaît le calcul des fractions (ce qui n'était pas évident à l'époque. Il s'aperçoit que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}=\frac{17}{18}$$

# Les racines

$$x^2 = 4 \quad \text{solution:} \quad x = 2$$

On complique les choses :

$$x^2 = 2 \quad \text{solution:} \quad x = \sqrt{2}$$

Les mathématiciens arabes introduise la terminologie "jizr" : racine, et le symbole $\surd$ correspondant, et développent des méthodes de calcul des racines carrées.

# Que veut dire "résoudre une équation"?

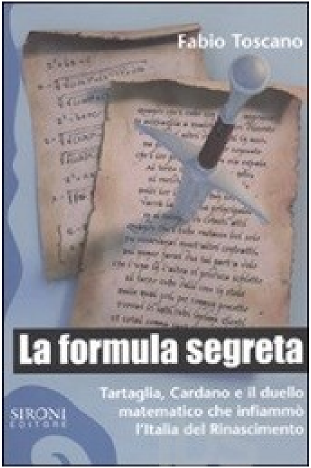
On complique un peu plus :

$$x^2 = x + 1 \quad \text{solution:} \quad x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Avec les quatre opérations et la racine carrée, on peut exprimer les solutions d'une équation du second degré, ou voir qu'il n'y a pas de solution.

# Les protagonistes

- Scipione del Ferro (1465-1526)
- Niccolò Fontana dit Tartaglia (1469-1557)
- Girolamo Cardano (1501-1576)
- Ludovico Ferrari (1522-1565)
- Raphaël Bombelli (1526-1572)


Fabio Toscano
La formula segreta
Tartaglia, Cardano e il duello matematico che infiammò l'Italia del Rinascimento
SIRONI EDITORE

# Équation du troisième degré : la formule de Cardan

L'équation $x^3 + 3x = 10$ a pour solution

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$$

Aujourd'hui, on préfère écrire

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{26}}$$

**Conclusion provisoire**

La résolution d'une équation du troisième degré se ramène à l'extraction de racines carrées et de racines cubiques.

# Où la formule de Cardan conduit à une impasse

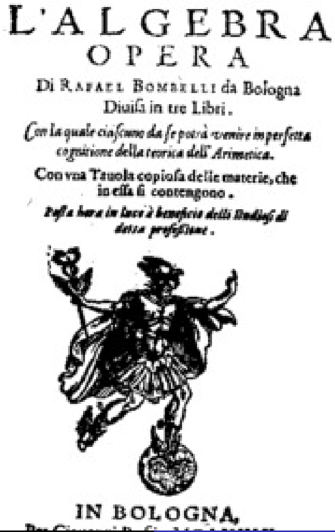
L'équation

$$x^3 = 15x + 4$$

admet 4 pour solution...

alors que la formule de Cardan donne

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$



L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli Studioſi di detta profeſſione.

IN BOLOGNA,

## Le coup de génie de Bombelli

Il fait comme si les nombres négatifs avaient une racine carrée. Pour cela, il ose introduire un "nombre" $\sqrt{-1}$ tel que $(\sqrt{-1})^2 = -1$ et il a l'intuition que $2 + \sqrt{-121}$ qu'il écrit $2 + 11\sqrt{-1}$ a pour racine cubique $2 + \sqrt{-1}$.

# Vérification

On a

$$(2+\sqrt{-1})^2 = 3+4\sqrt{-1}$$

puis

$$(2+\sqrt{-1})^3 = (3+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1}) = 2+11\sqrt{-1}$$

si bien que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+11\sqrt{-1}+2-11\sqrt{-1} = 4$$

# Ce n'est que le début d'une longue controverse

Albert Girard (1595-1632), grand mathématicien quelque peu méconnu, est le premier à pressentir qu'avec ces nouveaux nombres, toute équation algébrique de degré $n$ admet $n$ racines. Mais René Descartes (1596-1650) tout comme Isaac Newton (1642-1726) sont très réticents. Descartes les appelle *nombres impossibles* ou *imaginaires*

# La situation s'améliore dans le courant du XVIIIème siècle

Jean Rond d'Alembert (1717-1783) aurait dit à l'un de ses disciples

> *Essayez, la foi viendra ensuite.*

Mais c'est surtout Leonhard Euler (1707-1783) qui, avec son usage intensif et fructueux des nombres imaginaires, emporte la conviction de la communauté scientifique, avant l'apparition de fondements incontestables au début du XIXème siècle.

# La formule d'Euler

Il introduit la notation $i$ (comme imaginaire) pour le contesté $\sqrt{-1}$ et montre la formule suivante, considérée par la communauté mathématique, suite à un sondage récent, comme la plus belle formule mathématique.

$$e^{i\pi} = -1$$

## Livres

- Gilles Godefroy, *L'aventure des nombres*, Odile Jacob.
- Fabio Toscano, *La formule secrète ; ou le duel mathématique qui enflamma l'Italie de la Renaissance*, Belin (traduit de l'italien)
- Barry Mazur, *Ces nombres qui n'existent pas*, Dunod

## Sur la toile

- http://images.math.cnrs.fr/les-mots-des-mathematiques.html
- http://images.math.cnrs.fr/Quelques-mots-de-l-algebre.html
- Les articles de Wikipedia consacrés aux mathématiciens cités sont intéressants. Je recommande tout particulièrement les articles sur Alfred Girard et François Viète. Ce dernier est un peu hors sujet, mais c'était aussi un homme politique remarquable, et l'un des chapitres de son principal ouvrage est consacré à la zététique (dans un sens différent il est vrai).